Informe de Práctica:

Propuesta metodológica para la enseñanza de geometría en el curso de matemáticas básicas de la Universidad Nacional de Colombia (sede Medellín)

por

Martha Juliet Valencia Villa

Trabajo presentado como requisito parcial para optar el título de

Magíster en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Director: **Jorge Ramírez**

Universidad Nacional de Colombia - Sede Medellín
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas

Medellín, 2011

Índice

Índice de figuras

Resumen

En este texto se puede apreciar una propuesta realizada a partir del análisis de la experiencia vivida en la práctica docente asignada a estudiantes de la Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de Colombia sede Medellín. Dicha práctica consiste en asumir como docentes el curso de Matemáticas Básicas, el cual se sirve para estudiantes de primer semestre de pregrado en diferentes carreras; se presenta aquí la propuesta, en concreto en el área de Geometría, uno de los tópicos del curso en mención; con ella se pretenden fortalecer los elementos teórico-prácticos luego de evidenciar problemas serios en los estudiantes como la falta de conceptos previos necesarios y la dificultad para resolver situaciones problema de Geometría básica que serán fundamento de muchos otros cursos que asumirán posteriormente en niveles superiores de sus carreras. Se presenta la elección de unos elementos teóricos que enmarcan la propuesta, como son el modelo de Van Hiele que sustenta el proceso por el que pasan los estudiantes en la adquisición de conceptos geométricos, base para detectar las dificultades mencionadas y la teoría de las situaciones didácticas, fundamento del desarrollo de la misma en la reforma que se propone al curso.

Abstract This proposal is based on the analysis of our teaching experience as students of the Master of Sciences Teaching at the National University of Colombia, located in Medellin. This practice is concerned about how math teachers deal with first semester students who don't have the background needed in Basic Mathematics and have a lack of concepts to solve problems by using basic geometry which is the foundation of many other advanced courses during their

undergraduate careers.

As Geometry is intended to strengthen the theoretical and practical elements in students, it is presented Van Hiele's model as one of these theoretical elements for this proposal since it is a basis to find and solve the difficulties in their acquisition of geometrical concepts and didactic situations.

Palabras claves Geometría, metodología, postura didáctica, Niveles de aprendizaje, enseñanza, situaciones didácticas, congruencia, semejanza.

Introducción

En cada semestre las universidades del país, se enfrentan a la realidad y por consiguiente al reto de que quienes ingresen a ellas por primera vez, la carencia de las competencias básicas necesarias para asumir con éxito los cursos regulares de sus carreras. Asumir este reto da cuenta del papel que juega la Universidad en aspectos como la equidad, la convivencia y el desarrollo integral de los estudiantes; coherentemente con ello, es cada vez mayor la importancia de que quienes acceden a los niveles de educación superior, logren su permanencia y la exitosa conclusión de sus estudios. La Universidad Nacional de Colombia sede Medellín, no ajena a esta situación, ofrece a sus estudiantes nuevos, el curso de Matemáticas Básicas para aquellos estudiantes que no demuestran tener los requisitos en esta área en el examen de admisión.

En el primer semestre del año 2011, el programa de Maestría de Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales ofreció a sus estudiantes la práctica docente a un grupo de doce maestros. El objetivo del curso de Matemáticas Básicas es hacer un recuento de las principales temáticas abordadas en los últimos años de educación secundaria; las cuales se consideran como prerrequisitos tácitos para abordar las diferentes asignaturas de Matemáticas en los primeros niveles de la Universidad.

Dentro de este curso, es motivo específico de análisis la temática desarrollada en la sección de Geometría Elemental, pues sus elementos deben estar lo suficientemente claros en el estudiante de los primeros semestres, ya que son la base de posteriores conceptos en asignaturas de las áreas de Matemáticas y de Física. Además, es la Geometría la que permite realizar un avance significativo en el desarrollo lógico del pensamiento matemático. Vasco (2006), Alsina (1997).

Mi experiencia como docente en la Universidad de Antioquia, Programa de Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas, concretamente en el curso de Geometría, durante quince años, muestra falencias en los conceptos básicos como: Cuerpos geométricos, pirámides, prismas, triángulos, cuadriláteros con sus respectivas clasificaciones y propiedades. Igualmente, la práctica docente que llevo durante 21 años en la educación de la Básica Secundaria, me ha permitido observar el cómo en las Instituciones Educativas es poco lo que se trabaja en Geometría, y cuando se aborda esta rama, sólo se centra en el cálculo de áreas y perímetros de algunas figuras planas. En la mayoría de los programas de educación secundaria, la Geometría ha sido dejada a un lado y se enseña en la mayoría de los casos, en los últimos períodos académicos. Esto debido a las reformas curriculares desde los años setenta. Campos (1981), Vasco (2006), Catalá (1997).

La sección de Geometría en estos cursos introductorios de Matemáticas Básicas, tiene la tarea de generar en los estudiantes la inquietud de desarrollar su pensamiento espacial; en particular, lograr en ellos la claridad conceptual que les permita afrontar el conocimiento de su entorno desde un punto de vista geométrico formal. Igualmente, debe desarrollar las ideas intuitivas de lo espacial en general y proporcionar las herramientas necesarias para la formación de nociones, conceptos, proposiciones, métodos y técnicas geométricas, en un ambiente activo y constructivo. Leguizamón (2001). Es la Geometría la que permite la formación de un razonamiento, desde lo intuitivo hasta el formal. Vasco (2006).

Actualmente el curso de Matemáticas Básicas, adolece de una adecuada presentación en el tema de Geometría Elemental. Su contenido se presenta de una manera, que dada la generalizada falta de conceptos previos adecuados en los estudiantes, las ideas de mayor nivel no quedan claras, aunado a esto, la estructura del curso asigna poco tiempo para esta asignatura, tres sesiones de dos horas; de ahí que el curso presente un orden y una metodología que se debe mejorar. De igual forma, los temas propuestos: Ángulos y triángulos, congruencia y semejanza, Áreas y perímetros, volumen y área superficial de sólidos, se pueden reestructurar.

En cuanto a la metodología propuesta en las Notas de Clase que plantea la Escuela de Matemáticas, se propone una exposición por parte del profesor de unas definiciones y unos teoremas acompañados de ejemplos de aplicación. Por último sin que los estudiantes tengan una adecuada formación, se les asigna hacer demostraciones en los talleres. Se define así la pregunta por resolver con respecto a las falencias descritas: *¿Cómo desarrollar una metodología que mejore las condiciones de aprendizaje y los resultados en la temática de Geometría Elemental de los cursos introductorios de Matemáticas Básicas de la Universidad Nacional de Colombia sede Medellín?*

La propuesta aquí presentada pretende plantear cambios en los siguientes aspectos:

Primero, en lo que tiene que ver con la intensidad horaria para poder reestructurar las temáticas, ya que en la actualidad los temas de Geometría se dan en tres sesiones de dos horas, pasaría a una sección de seis bloques de clase. En este caso a la sesión de Álgebra se le restaría un bloque de clase, a la sesión de Funciones Reales se le restaría dos bloques, ya que en estas temáticas se da una mayor formación en la básica secundaria, contrario a Geometría que poco se trabaja. Este tiempo adicional se requiere para desarrollar la propuesta de una temática de la siguiente forma:

- Cuerpos geométricos; Esta temática se desarrolla en un bloque de clase con una caja de cuerpos geométricos: Poliedros (prismas, pirámides, poliedros regulares) y cuerpos redondos (cono, cilindro, esfera); se desarrolla por medio de preguntas con el propósito de revisar tanto las generalidades como los conceptos que traen los estudiantes de la básica secundaria; también se trabaja la clasificación de cuerpos.
- Triángulos; definiciones, clasificación, teoremas de congruencia, líneas notables, propiedades, construcciones a regla y compás con la respectiva descripción para pasar de la intuición a la conceptualización.
- Paralelismo y cuadriláteros: Por medio de construcciones a regla y compás, se trazan los diferentes cuadriláteros, deben basarse en las construcciones anteriores, y en el concepto fundamental del paralelismo. Propiedades de los cuadriláteros: Trapecios, paralelogramos; rectángulo, cuadrado, rombo.

- Semejanza: se realizarán construcciones que permita tener los teoremas de semejanza en los triángulos, Teorema de Thales.
- Área y perímetro: Teorema de Pitágoras y áreas y perímetro de algunas figuras planas.
- Volumen y Área superficial: Se realizarán ejercicios para hallar el volumen de algunos poliedros: Prisma, pirámide, poliedros regulares; cuerpos redondos: Esfera, cono, prisma.

El orden de la temática corresponde a la forma como las ideas geométricas se inician en las personas desde lo tridimensional, es decir los cuerpos geométricos, permitiendo desde la observación evaluar en los estudiantes los niveles conceptuales, para irnos adentrando en los conceptos de las figuras por medio de las construcciones con regla y compás. Monsalve (2000), Guillen (1997), Dickson (1991), Castelnovo (1997), González (2008).

Segundo, en lo que respecta a la postura didáctica, se pretende dar más importancia a la actividad exploratoria y participativa de los estudiantes fomentando la discusión y el trabajo colaborativo. Además se le asigna al profesor el rol de presentador de situaciones problema y mediador del proceso con secuencias de actividades diferenciadas según su propósito. Es de especial consideración la concepción que plantea una actividad más participativa del estudiante y coherentemente con ello, un papel ya no meramente expositivo por parte del profesor. Al contrario, uno que tienda más a asumir la mediación entre el estudiante y el objeto de estudio.

Así pues en la línea de una postura constructivista podemos resaltar aportes como el de los Niveles de Aprendizaje de Van Hiele, Dickson (1991), Catalá (1997), Vasco (2006), en ella se plantea que quien aprende pasa por los niveles de: Visualización, Análisis, Ordenación o Clasificación, Deducción formal y Rigor. Los Niveles de Van Hiele tratan de describir las etapas en las que se puede diferenciar el progreso en la Geometría, con el fin de adaptar los currículos y la práctica misma de la enseñanza al nivel conceptual en la que está el estudiante. En cuanto a aspectos de la enseñanza, es viable pensar en la teoría de situaciones didácticas Brousseau (2007) que propone un trabajo específico para el profesor como motivador de situaciones y mediador en el aprendizaje activo y colaborativo por parte de los estudiantes. Se dan en este proceso situaciones de: Acción, Formulación y Validación. Samper (2003).

La organización del informe del trabajo realizado durante la práctica y la propuesta para el curso de Matemáticas Básicas es la siguiente.

Sección 1: Se realiza una descripción como se organizo la práctica docente en Matemáticas Básicas primer semestre del año 2011, una descripción del grupo analizado, una descripción de las temáticas del curso con respecto a las clases de Geometría y un análisis de la evaluación presentada por algunos estudiantes.

Sección 2: El Marco teórico con las precisiones sobre los fundamentos de la teoría de los Niveles de Van Hiele, la cual da una explicación sobre el posible desarrollo del pensamiento geométrico en los estudiantes y la Teoría de Situaciones Didácticas de Guy Brousseau, que aportan al fundamento didáctico de la propuesta.

Sección 3: La propuesta que está enfocada en una metodología constructivista, basada en las situaciones didácticas, mediante el empleo de la regla y el compás, se describe el planteamiento general de la propuesta sus objetivos y una descripción de las seis clases en lo que respecta a materiales, temáticas, procedimientos y actividades.

Sección 4: Conclusiones y Recomendaciones.

1. Observaciones durante la práctica

La Escuela de Matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia sede Medellín implementó para el primer semestre de 2011, el experimento de permitir la práctica docente, para su trabajo de grado a 12 estudiantes de la Maestría de Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales, la cual consistía en asumir el reto como profesores del curso de Matemáticas Básicas.

Para esta experiencia se organizaron grupos de 34 estudiantes, teniendo en cuenta que los cursos son para grupos entre 75 y 120 estudiantes, estos se ofrecieron a aquellos que habiendo sido admitidos no alcanzaron el nivel requerido en Matemáticas. Este curso es obligatorio, si los estudiantes lo reprueban no lo repiten, pero la nota obtenida entra en el promedio académico ponderado. Ésta debe ser mayor o igual a tres para no perder la calidad de estudiante.

El 70 % de la evaluación es realizada por cada docente al interior del curso y el 30 % es una prueba de suficiencia realizada desde la sede principal de Bogotá. La intensidad horaria es de cuatro horas por semana, en bloques de dos horas por clase, con asesoría por parte de los doce profesores de la práctica del curso y los monitores de la Escuela, también se beneficiaron de talleres programados por la Escuela de Matemáticas.

1.1. Algunas generalidades del curso de Matemáticas Básicas durante la práctica

De los 34 estudiantes del grupo analizado, 22 pertenecen al programa de Matemáticas. La edad de los estudiantes es entre los 16 y 19 años, graduados de diferentes Instituciones Educativas del sector oficial y privado.

Los temas tratados durante el curso fueron los siguientes: Conjuntos y sistemas numéricos, geometría elemental, álgebra, ecuaciones y desigualdades, funciones reales, trigonometría. Para la práctica docente sólo se realizó la propuesta de cambiar el orden en la temática de geometría para ser dictada después de ecuaciones y desigualdades, por considerar que debe anteceder a funciones reales y trigonometría. Se usaron los documentos de la Escuela de Matemáticas, tanto para las clases como los talleres propuestos.

1.2. Temáticas y evaluación en Geometría durante la práctica

Los temas se desarrollaron en tres clases, de dos horas cada una. Las cuales eran apoyadas por las Notas de Clase y los talleres de la Escuela de Matemáticas.

Clase N° 1: Ángulos y triángulos: Medición de ángulos, relaciones entre ángulos, clasificación de triángulos, rectas y puntos notables en un triángulo.

Descripción de la clase: Al inicio de la clase se realizaron las siguientes preguntas orientadoras para observar el nivel conceptual de los estudiantes: ¿Qué clase de triángulos conocen?, ¿Cómo se clasifican los ángulos y triángulos?, ¿Cuáles son y cómo se construyen las líneas notables del triángulo?. Se comprobó falta de claridad en estos conceptos y se desarrolla por medio de construcciones con regla y compás los elementos del triángulo. La escasa participación de los estudiantes mostraba poco trabajo en estos temas en la educación básica secundaria.

Clase N°2: Congruencia y semejanza de triángulos.

Descripción de la clase: Se explicaron los criterios de congruencia y semejanza, ignorados por los estudiantes, se aplicó el criterio de semejanza al volumen del cono y se desarrollan ejercicios de esta temática incluidos en el taller de la Escuela de Matemáticas.

Clase N°3: Área y perímetro de figuras planas: rectángulo, cuadrado, paralelogramo, triángulo, trapecio, círculo. Teorema de Pitágoras. Volumen y área superficial de sólidos: paralelepípedo, cilindro circular recto, cono circular recto y esfera.

Descripción de la clase: Los estudiantes se organizaron en grupos de a tres para resolver el taller propuesto por la Escuela de Matemáticas con la asesoría de la profesora en cada uno de los grupos y la ayuda entre ellos. Luego se resolvieron algunos ejercicios en el tablero para hacer las correcciones. Para verificar los procedimientos se les pidió que entregaran los dos talleres de Geometría propuestos por la Escuela de Matemáticas.

Evaluación de la temática de geometría: Se realizó el quiz N°4 en las temáticas: Área y perímetro; volumen del cono, donde era necesario aplicar el criterio de semejanza; aplicación de las bisectrices de un paralelogramo. Los estudiantes mostraron no tener claridad sobre los temas. Además carecían de argumentos sólidos en el momento de dar justificaciones.

Dada la generalidad de los temas para poder ser abordados en su totalidad durante las clases, fue necesario seguir la misma presentación propuesta en las Notas de Clase y los talleres de la Escuela de Matemáticas (ver Anexo1,2,3). En estos se puede observar algunas definiciones, teoremas y la realización de algunos ejemplos incluyendo algunas demostraciones. Se pudo evidenciar la falta de conceptualización, para el desarrollo de la solución de los diferentes problemas planteados. Su solución se limita a aplicar métodos mecánicos reducidos a la operatividad. Algunos ejemplos son los siguientes:

Ejemplo uno: Dado que $\overline{AC}$ es perpendicular a $\overline{CE}$, que $\overline{BF}$ es bisectriz de $\angle ABD$ y que $\overline{DF}$ es bisectriz de $\angle BDE$, halle el valor de $\angle BFD$. En la figura 1.

La solución que presenta este estudiante carece de una justificación para la realización de las construcciones auxiliares, en el manejo de las ecuaciones tiene problemas operativos.

1. Construye una recta paralela al segmento $\overline{CE}$ y que pasa por el punto B, concluyendo que es bisectriz del ángulo $\angle FBD$, *no escribe justificación de la construcción, ni por que es bisectriz.*
2. Plantea la suma de los ángulos $\angle ABF$ con el bisecado del ángulo $\angle FBD$ escribiendo con ello la siguiente ecuación: $x + \frac{x}{2} = 90°$, *No justificó por qué la suma es de* $90°$, resuelve la ecuación para obtener el valor de $x = 60°$, siendo x el ángulo $\angle ABF$.

3. En el $\triangle BCD$, encuentra el valor del ángulo $\angle DBC = 60°$, y que por tanto el valor del ángulo $\angle BDC = 30°$, *no realiza ningún procedimiento para ello.* Los resultados anteriores son obtenidos a partir de la figura 1. Luego escribe una ecuación de la suma de los ángulos adyacentes en el punto D, es decir, $\angle EDC + \angle EDB + \angle BDC = 180°$, para encontrar el valor de y según la figura. $y = 75°$.
4. La ecuación planteada para encontrar el valor del ángulo $\angle BFD$, nombrado con la letra C, la misma letra del vértice del triángulo $\triangle BCD$. Siendo la ecuación $C = 60° + 75° - 180°$, ecuación que está mal planteada, no advierte que su resultado es un ángulo negativo.

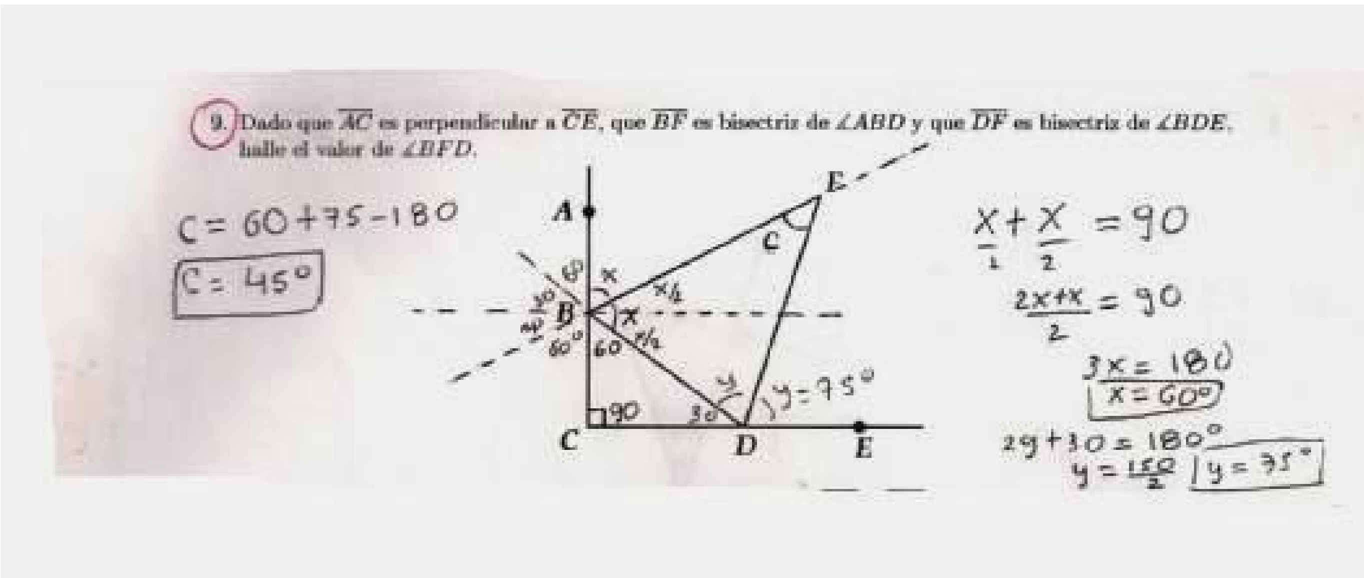


Figura 1: Ejemplo uno

Ejemplo dos: Considere la figura 2.

- Sabiendo que $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, que F es punto medio de $\overline{BC}$ y que $\angle BFD \cong \angle CFE$, demuestre que $\overline{FD} \cong \overline{FE}$.
- Sabiendo que $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, que $\overline{AD} \cong \overline{AE}$, y que $\overline{FD}$ y $\overline{AB}$,son perpendiculares y que $\overline{FE}$ y $\overline{AC}$ son perpendiculares, demuestre que $\overline{BF} \cong \overline{FC}$.

Para la solución de este ejercicio el estudiante muestra errores en la notación de los lados, realiza una demostración sin una justificación, hace una mala demostración de la congruencia de los triángulos $\triangle BFD$ y $\triangle FEC$.

El estudiante resuelve el literal a.

1. En el primer paso escribe $\overline{BC} \cong \overline{AC}$, debía escribir $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, con error de notación el segmento $\overline{BC}$ debía ser $\overline{AB}$

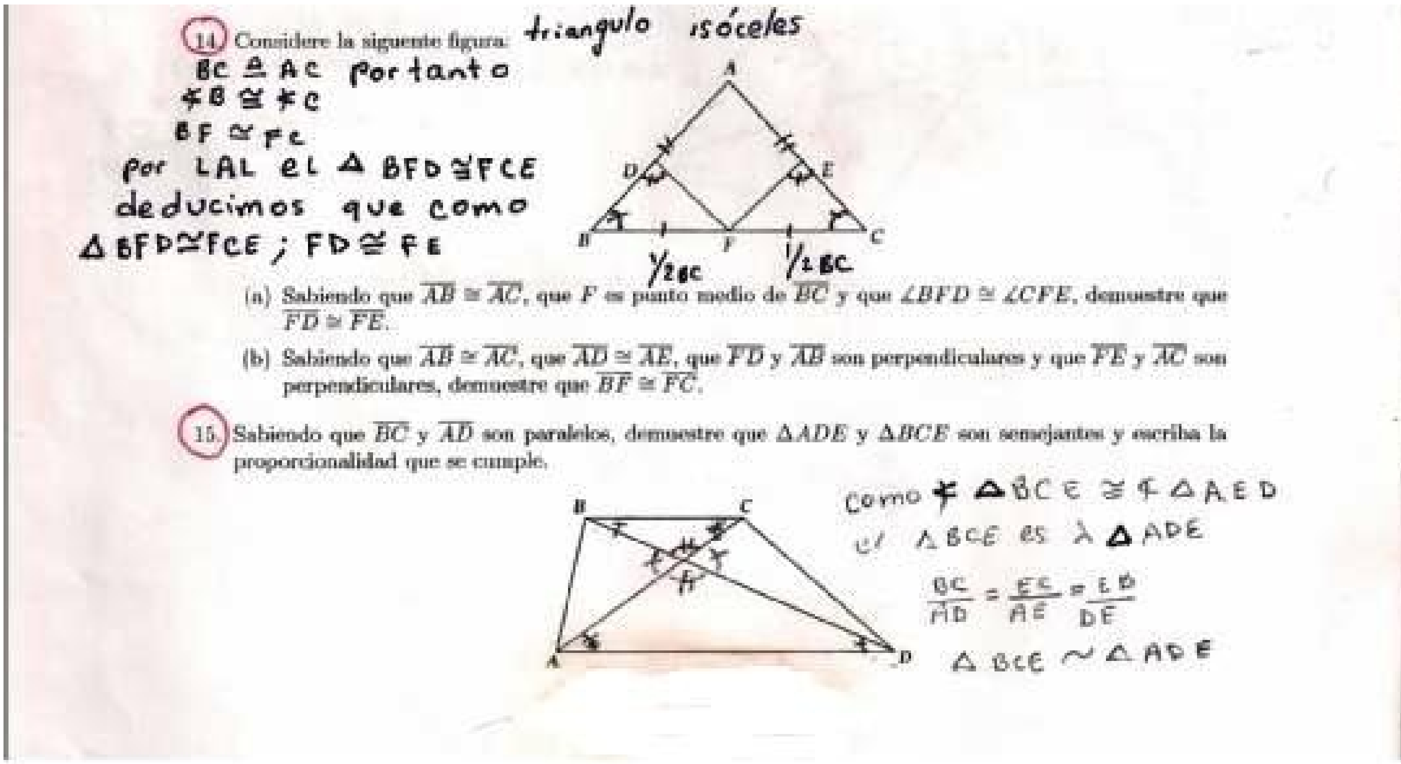


Figura 2: Ejemplo dos y tres

2. Concluye la congruencia de los ángulos $\angle B \cong \angle C$, le faltó la justificaión, por ser $\triangle ABC$, triángulo isósceles. Concluye la congruencia de los segmentos, $\overline{BF} \cong \overline{FC}$, le faltó justificar, por ser el punto F, punto medio de $\overline{BC}$
3. Concluye la congruencia $\triangle BFD \cong \triangle FCE$. Con errores de notación porque sólo escribe las letras FCE, con el criterio de congruencia LAL. Sin advertir que los elementos descritos en los pasos anteriores sólo le corresponden, los ángulos $\angle B$ y $\angle C$ y los lados $\overline{BF}$ y $\overline{CF}$, es decir le faltó la congruencia de los lados $\overline{BD}$ y $\overline{EC}$.
4. Por último, está concluyendo $\overline{FD} \cong \overline{FE}$, de la congruencia $\triangle BFD \cong \triangle FCE$ mal demostrada.

Para este ejercicio la demostración es realizada con errores de notación y no advierte la correspondencia de los elementos del triángulo.

Ejemplo tres: Sabiendo que $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$ son paralelos, demuestre que $\triangle ADE$ y $\triangle BCE$ son semejantes y escriba la proporción que se cumple. En la figura 2.

1. El estudiante muestra errores de notación, escribe el símbolo de ángulo y luego el de triángulo. No advierte la existencia de una semejanza de triángulos y supone una congruencia. Es decir escribe $\triangle BCE \cong \triangle AED$, en realidad son triángulos semejantes.
2. Concluye una proporcionalidad sin la demostración de la semejanza de los triángulos, sin utilizar un criterio de semejanza, de los triángulos $\triangle BCE \sim \triangle AED$

La realización de este ejercicio muestra errores: Conceptuales, de semejanza y congruencia, Notación de simbolos, para ángulos y triángulos, definiciones, desconocimiento para aplicar los teoremas de congruencia y semejanza.

Ejemplo cuatro: Ver la figura 3.

- Demuestre que la bisectriz del ángulo interior de un triángulo, divide al lado opuesto en segmentos proporcionales a los otros dos lados.
- Sabiendo que $\overline{AD}$ es bisectriz de $\angle CAB$, calcule el valor de x.

En la solución de este problema, el estudiante no resolvió la demostración propuesta en el literal a. Para la solución del literal b, el estudiante debía en cambio utilizar el literal a, son llevados a concluir errores poder poder resolverlo por ecuaciones.

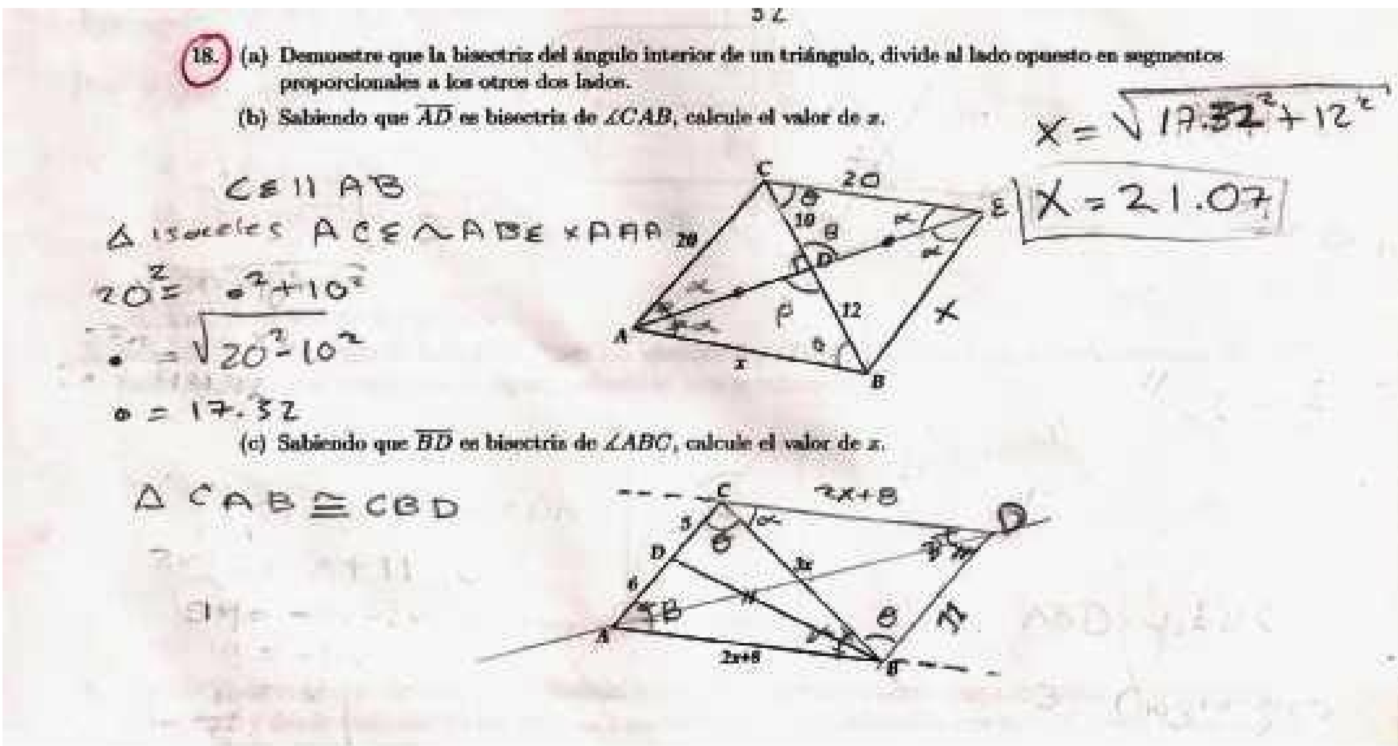


Figura 3: Ejemplo cuatro

Ejemplo cinco: La base de una pirámide regular es un hexágono de 15 cm de lado. Su altura es de 30cm. Halla su volumen. Si partimos esta pirámide por un plano paralelo a la base que corta a la altura en la mitad, halla el volumen da cada una de las dos partes resultantes. Figura 4.

En la solución de este ejercicio el estudiante, reduce la solución a multiplicar las magnitudes de los lados. Al truncarla la pirámide asume que la base de la pirámide que se produce en la

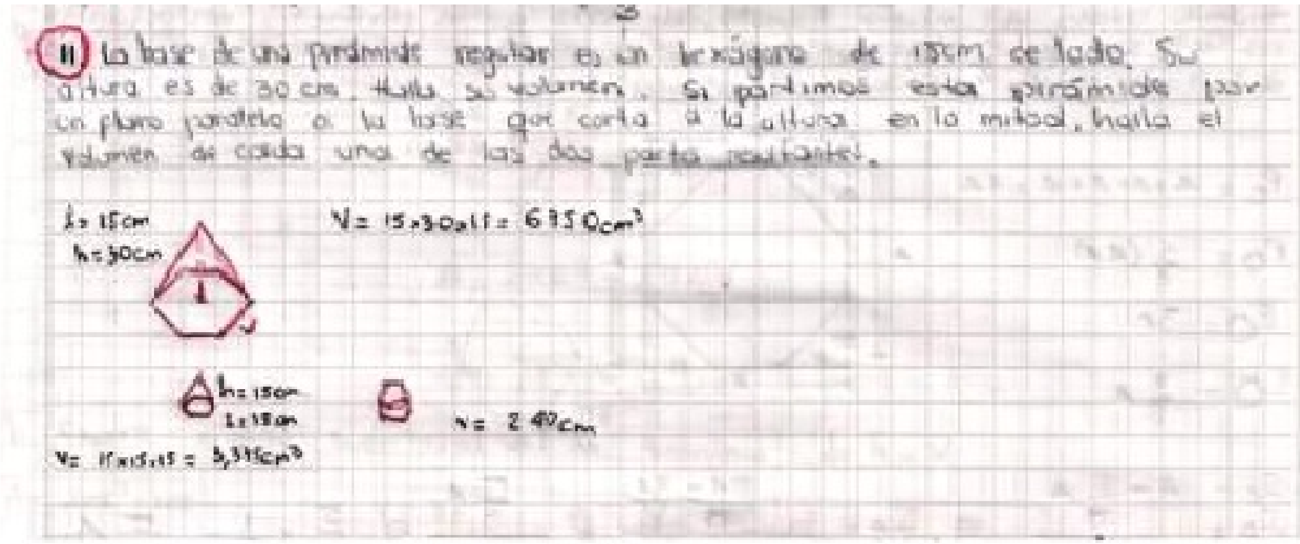


Figura 4: Ejemplo cinco

parte de arriba conserva sus medidas, la falta de experimentación con cuerpos tridimensionales, lo llevan a cometer errores conceptuales como éste.

En los anteriores ejemplos, los estudiantes muestran su bajo nivel de razonamiento en Geometría, que cómo se puede observar, está en un nivel muy básico, la falta de conceptos en cada temática, apropiación de los teoremas y definiciones. En las demostraciones suponen información desde las gráficas que no son válidas.

2. Marco teórico

En esta sección se describe la teoría de los Niveles de Van Hiele, la cuál es el referente teórico para identificar cómo se produce la evolución del razonamiento geométrico en los estudiantes, de acuerdo a esa identificación del Nivel se realizarán actividades teniendo encuenta las Situaciones Didácticas propuestas por Brousseau que permitan avanzar en esos razonamientos.

2.1. Teoría de los Niveles de Van Hiele

El "Modelo Van Hiele"surgió para resolver las dificultades que presentaban algunos estudiantes en el aprendizaje de las nociones geométricas. Este modelo da cuenta de que el pensamiento geométrico se construye a partir de un proceso de lenta evolución, que va desde las formas intuitivas iniciales de pensamiento, en los niños, hasta las formas deductivas finales, en los correspondientes a niveles superiores escolares. (González 2008)

Este modelo de enseñanza y aprendizaje, explica cómo se produce la evolución del razonamiento geométrico de los estudiantes, empezando con el reconocimiento de figuras (nivel 0), progresando hacia el descubrimiento de sus propiedades y hacia el razonamiento informal acerca de éstas (niveles 1 y 2), y culminando con un estudio riguroso de geometría axiomática (niveles 3 y 4). El nivel 0 es denominado nivel de reconocimiento o visualización; el nivel 1, de análisis; el nivel 2, clasificación o abstracción; el nivel 3, deducción, y el nivel 4 rigor. Catalá (1997)

Nivel 0: Visualización o Reconocimiento. En este nivel los objetos se perciben en su totalidad como un todo, no diferenciando sus características y propiedades, las descripciones son visuales y tendientes a asemejarlas con elementos familiares. Una figura geométrica es vista como un todo desprovisto de componentes o atributos, un estudiante en este nivel puede aprender vocabulario geométrico, puede identificar formas geométricas determinadas entre un conjunto de ellas, dada una figura, puede reproducirla. Antón (1994) Por ejemplo: Un estudiante en este nivel puede: Identificar formas (cuadrado, círculo, triángulo). Reproducir formas, no reconocen que las figuras tienen ángulos, lados opuestos paralelos. (González 2008)

Nivel 1: Análisis. Permite las comparaciones entre figuras, la definición y clasificación de propiedades, las conjeturas intuitivas sobre la relación entre propiedades, el razonamiento informal para sustentar o refutar las conjeturas simples y el reconocimiento de las condiciones necesarias. Ejemplo: un cuadrado tiene lados y ángulos iguales. (Antón 1994) Por ejemplo un estudiante de este Nivel puede: Reconocer que las figuras tienen elementos, reconocer las figuras por sus elementos, hacer generalizaciones en forma intuitiva. En cambio no puede: Explicar las relaciones entre propiedades, ver las interrelaciones entre figuras, comprender las definiciones. (González 2008)

Nivel 2: Ordenación o Clasificación. Describen los objetos y figuras de manera formal. Entienden los significados de las definiciones; reconocen cómo algunas propiedades derivan de otras; establecen relaciones entre propiedades y sus consecuencias. Los estudiantes son capaces de seguir demostraciones; aunque no las entienden como un todo, ya que, con su razonamiento lógico sólo son capaces de seguir pasos individuales; determinan las figuras por sus propiedades, por ejemplo, çada cuadrado es un rectángulo", Son incapaces de organizar una secuencia de razonamientos que justifiquen sus observaciones. Conoce las primeras definiciones. Por ejemplo: En un paralelogramo, lados opuestos iguales implican lados opuestos paralelos; lados opuestos paralelos implican lados opuestos iguales. Antón (1994); un rectángulo, a lados opuestos paralelos e iguales, le corresponden ángulos opuestos iguales (relaciones en el interior de la figura); un cuadrado es, también, un rectángulo, por poseer todas las propiedades del rectángulo (relaciones entre figuras). (González 2008)

Nivel 3: Deducción Formal. El razonamiento puede formalizarse, las reglas de inferencia se explican, se capta la fuerza demostrativa y se utiliza correctamente la demostración indirecta y se puede transformar una argumentación en una cadena de fórmulas simbólicas con transiciones respaldadas por axiomas o por teoremas anteriores. Ejemplo: demuestra de forma sintética o analítica que las diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio. (Antón 1994)

Nivel 4: Rigor de varios sistemas deductivos, puede apreciar la consistencia, la independencia y la completitud de los axiomas de los fundamentos de la Geometría. El estudiante compara sistemas basados en axiomáticas diferentes. Los Van Hiele afirman que sólo el respeto a la jerarquía de niveles posibilita un aprendizaje. (Antón 1994)

"Las investigaciones de Van Hiele han demostrado que el paso de un nivel a otro es independiente de la edad, muchos adultos se encuentran en un nivel 0 (porque no han tenido la oportunidad de enfrentarse con experiencias que les invitasen a pasar al nivel 1. Un profesor a través de los contenidos y los métodos de enseñanza pueden provocar el paso de un nivel a otro"(Catalá 1997)

Este modelo es recursivo, es decir cada nivel se construye sobre el anterior, de esta manera el desarrollo de los conceptos espaciales y geométricos ocurren como una secuencia desde planteamientos inductivos y cualitativos, hacia formas de razonamiento cada vez más deductivas y abstractas.

2.2. Teoría De Las Situaciones Didácticas

Según Brousseau (2007), para enseñar Matemáticas, se hace necesario tener una buena formación en ella. De lo contrario qué podría enseñar el docente si no cuenta con dicha disciplina de formación; impartir su enseñanza y aprendizaje, se facilita si asume la didáctica de la Matemática, pues el saber y una didáctica de la Matemática son aspectos que deben estar acompañados para generar ambientes y propuestas que faciliten su aprendizaje. Es por ello que la "Teoría de Situaciones Didácticas"busca las condiciones para la formación en los conocimientos matemáticos, los cuales no se construyen de manera espontánea.

Es importante definir "Situación“ como el modelo de interacción entre el sujeto y un medio determinado; es decir, un entorno del estudiante, incluidos el docente y el sistema educativo. Brousseau (2007). Diseñar situaciones que ofrezcan al estudiante la posibilidad de construir el conocimiento da lugar para la organización de la enseñanza, a la existencia de momentos de aprendizaje, donde el estudiante se encuentra solo frente a la resolución de un problema, sin que el profesor intervenga en cuestiones relativas al saber en juego. (Brousseau 2007). El reconocimiento de la necesidad de esos momentos de aprendizaje dio lugar a la noción de situación a-didáctica (o fase a-didáctica dentro de una situación didáctica). (Brousseau 1986)

"Lo que caracteriza la perspectiva constructivista, es la voluntad de poner al alumno en situación de producir conocimientos (en general reformulando y luchando contra conocimientos anteriores) en referencia en primer lugar al problema, y no en primer lugar a la intención de la enseñanza. Es la presencia y la funcionalidad en la situación didáctica de una etapa de situación a-didáctica la marca principal de la diferencia con las situaciones estrictamente formales."(Brousseau 2007) La teoría distingue tres tipos de situaciones didácticas: Situaciones de acción, de formulación y de validación:

Situación de Acción o Experimentación: Estas situaciones ponen al estudiante en contacto con una actividad o problema, cuya solución es precisamente el conocimiento que se quiere enseñar. Brousseau (2007). El estudiante formula, prevée y explica la situación, organizando sus estrategias con el fin de construir una representación de la situación que sirva de modelo y le ayude a tomar decisiones. (Chamorro 2005)

Situación de formulación: El estudiante intercambia información con el profesor o entre grupos de estudiantes. El objetivo es que los estudiantes comuniquen los resultados usando un lenguaje propio. (Chamorro 2005).

Situación de Validación: El estudiante debe justificar la pertinencia y validez de la estrategia puesta en marcha, elaborar la verificación a través de pruebas (no empíricas).

Propiciar las situaciones que permitan en el estudiante aproximarse a los conceptos, teorías y razonamientos, conducen al desarrollo de un pensamiento matemático.

3. Propuesta metodológica

Para tener una práctica docente que pretenda avances significativos en el aprendizaje, es necesario determinar el estado inicial, a lo largo del proceso, los estados a los que van llegando los estudiantes. No sólo como parte de un acto evaluativo sumativo, sino como una ruta permanente que determina pautas de acción. Específicamente en el área de Geometría y concretamente en las temáticas fundamentales de un curso de nivel básico, contamos con una teoría que se vuelve herramienta de trabajo en el sentido antes mencionado; ésta es la teoría de los Niveles de razonamiento geométrico de Van Hiele.

En esta propuesta para el desarrollo de los temas de Geometría dentro del curso de Matemáticas Básicas, el docente se apoyará en la caracterización descrita en el marco teórico para ubicar de manera general en el grupo de estudiantes, los saberes previos al inicio del curso e ir constatando los niveles que van logrando a medida que éste avanza.

A continuación se verá como los Niveles de Van Hiele sustentan y aportan a la propuesta.

- Si los estudiantes, por ejemplo, únicamente reconocen nombres y generalidades de los objetos geométricos (nivel 0) se deberá desarrollar un trabajo docente que propicie de manera constructiva la identificación de los elementos constitutivos de un objeto geométrico, entendiendo éste como un cuerpo o una figura bidimensional. Una manera de acercarse poderosamente a tal propósito será la construcción con regla y compás acompañado de una intencionalidad didáctica.
- Si los estudiantes no perciben relaciones básicas entre diferentes cuerpos o figuras y apenas perciben el reconocimiento de los elementos y algunas relaciones intrafigurales (nivel1) será necesario desarrollar mostraciones y demostraciones intuitivas. Valiéndose de construcciones sencillas de unos objetos geométricos a partir de otros, realizar transformaciones y analizar comparaciones, establecer diferencias y similitudes que propicien claridad para hacer clasificaciones, inclusiones, entre otros (nivel2).
- En la temática del curso de Geometría será posible llegar incluso en algunos casos a desarrollar los primeros elementos de deducción formal apoyados en las actividades didácticas y las construcciones con regla y compás. Iniciando los primeros niveles de formalización (nivel 3).

El trabajo planteado a partir del reconocimiento constante del nivel en el que están los estudiantes, se desarrollará apoyado en los elementos activos de una práctica docente realizada para tal fin con el apoyo de la regla y el compás. De ninguna manera esto se puede entender como un activismo por sí. Tal desarrollo implica una planeación del docente y un trabajo secuenciado de actividades con un propósito. Por lo anterior, no se trata de dar instrucciones a manera de recetario para realizar bonitas construcciones sin sentido para quien las desarrolla. Al contrario, plantear situaciones que inviten a ser resueltas mediante los instrumentos y los conocimientos que se van adquiriendo.

Igualmente, la Teoría de las Situaciones Didácticas hace su aporte a esta propuesta desde una fundamentación pedagógica desde tres tipos de situaciones didácticas.

- En primer momento, la clase planteará la necesidad de una acción que implique intentos de resolución de un problema. Planteado éste como una pregunta de Geometría que debe destacar actitudes de razonamiento como las de predicción, argumentación, experimentación y uso de estrategias heurísticas para resolver problemas (Situación de acción).
- Luego, la clase de Geometría deberá nutrirse del valor del conocimiento como una actividad social. Esto se dará en aquellos momentos en los que en las actividades de taller se propicien discusiones, confrontaciones, acuerdos y en general socialización y comunicación cada vez más óptima de las ideas (Situación de formulación).
- Por último, en la propuesta de clase se plantean momentos posteriores en los cuales se pone a prueba lo pertinente de un conocimiento obtenido por medio de la metodología de talleres y situaciones didácticas. Éstos tienen que ver con que el estudiante revise qué tan válida es la estrategia desarrollada. Al resolver un problema se evidenciarán diferentes formas y se aprenderá más significativamente en la medida en que dichos caminos surjan de una situación propuesta por el profesor pero pensada, trabajada, prevista por los estudiantes, incluidos los posibles errores encontrados (Situación de validación).

Es muy importante dejar en claro que para la realización de esta propuesta que se basa en el reconocimiento constante de los diferentes niveles de razonamiento y en la aplicación de una secuencia ordenada de situaciones, el concepto de taller tiene que rebasar la idea de una hoja. En ella no sólo habrá planteados unos ejercicios sino todo un proceso constructivista para que cobre importancia la actividad pensada, socializada y formadora de conocimiento.

La propuesta en concreto está basada en el texto: "Notas de Geometría Plana"de Cecilia Villegas de Arias y Santiago Valencia Restrepo, con algunas modificaciones a partir de mi experiencia como docente de Geometría, durante 15 años en la Universidad de Antioquia.

Para la propuesta pedagógica se propone el siguiente objetivo general: Propiciar ambientes de aprendizaje al estudiante recién admitido a los diferentes programas de la Universidad en el curso de Matemáticas Básicas, para que tengan las bases suficientes de abordar cursos posteriores en sus carreras de manera favorable.

Los objetivos específicos:

- Acercar al estudiante del curso de Matemáticas Básicas, a actividades que favorezcan la formación de los conceptos geométricos.
- Favorecer el razonamiento geométrico dentro del aula, por medio de construcciones con regla y compás.

A continuación se relacionan las clases propuestas para los estudiantes recién admitidos en el curso de Matemáticas Básicas.

3.1. Clase número uno : Cuerpos geométricos

Para la clase uno, se utilizará como material concreto la caja de cuerpos geométricos: cuerpos redondos y poliedros. Para revisar en los estudiantes los conceptos de Geometría se utilizará el taller del grupo Ábaco de la Universidad Nacional de Colombia sede Medellín, del proyecto, Matemáticas y Física Básica en Antioquia, año 2000.

- Clasificación de los cuerpos geométricos
- Poliedros, poliedros regulares.
- Prismas
- Pirámides
- Cilindro, cono, esfera.

Materiales: Caja de Cuerpos, Juego de poliedros regulares, Arquimedianos, pirámides y prismas; cordones de colores.

Ambientes de aprendizaje: Aula Taller de la Universidad Nacional.

Metodología: La clase estará dividida en dos momentos, en el primero los estudiantes se reunirán por parejas, se les entregará algunos cuerpos geométricos y desarrollarán la guía de trabajo con la orientación y asesoría constante del docente. En el segundo momento se hará una socialización de los resultados obtenidos, donde el docente concentrará la atención de los estudiantes en los conceptos más relevantes de la actividad.

1. Clasificación de los cuerpos. Con una caja de cuerpos, se realizará la clasificación de los cuerpos según sean sus caras planas o redondas, en las cuales se aproximan a las diferentes definiciones de cada conjunto. Los sólidos se prestan a una adecuada introducción de la noción de punto (una de sus esquinas o vértices), y sus aristas a la explicación de las nociones de línea recta y curva.

   Establezca una clara relación entre las propiedades de los cuerpos estudiados y las relaciones entre los conjuntos considerados.

   ¿Cuál es el prisma que también es poliedro regular?

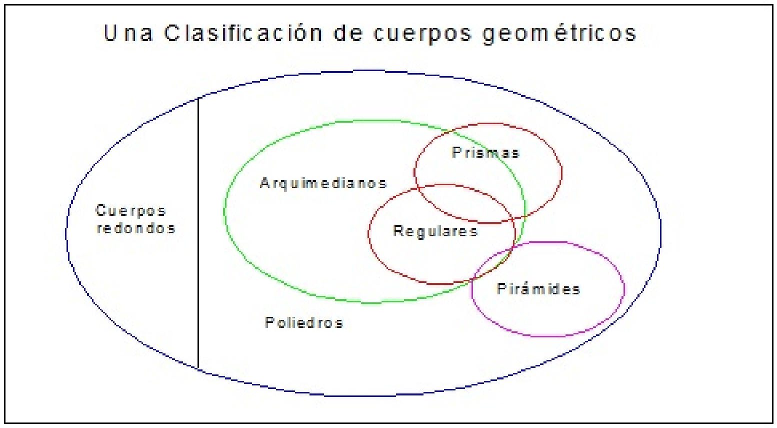


Figura 5: Clasificación de los cuerpos geométricos

¿Cuál es la pirámide que también es poliedro regular?

¿Los poliedros regulares son también arquimedianos? ¿Los poliedros arquimedianos son también regulares?

2. Hallar la relación de Euler en los poliedros. $C + V - A = 2$.

   Donde:

   $C =$ Número de caras. $A =$ Número de aristas. $V =$ Número de vértices.

Para las clases restantes me baso en el texto de Curso de Geometría por Felipe de Jesús Landaverde y Notas de Geometría Plana de Cecilia Villegas de Arias.

3.2. Clases número dos y tres: Conceptos fundamentales

Los siguientes conceptos serán los del texto, Notas de Geomtería Plana Cecilia Villagas, unidad 1.

- Postulados de Euclides y Hilbert.
- Punto, recta, semirecta, segmento, plano, ángulo, medida de ángulo, clases de ángulos.
- Triángulos, clasificación, líneas notables del triángulo.
- Congruencia de triángulos; $L - A - L$, $L - L - L$, $A - L - A$.
- Desigualdad triangular. Los siguientes conceptos serán los del texto, Notas de Geomtería Plana Cecilia Villagas, unidad 2.
- Perpendicularidad.

- Paralelismo
- Postulado de las paralelas
- Ángulos entre dos rectas paralelas y una transversal
- Aplicaciones en triángulos, suma de ángulos interiores de un triángulo, ángulo exterior de un triángulo.
- Cuadriláteros en el plano. Los siguientes conceptos serán los del texto, Notas de Geomtería Plana Cecilia Villagas, unidad 3.
    - Clasificación de cuadriláteros.
    - Teoremas sobre paralelogramos.
    - Teoremas sobre rectángulos.
    - Teoremas sobre rombos.
    - Paralelismo y triángulos.
    - Paralelismo y trapecios.
- Aplicaciones en triángulos rectángulos; teorema $30 - 60 - 90$.

Materiales: Lápiz, regla, compás, block sin rayas.

Ambientes de aprendizaje: Aula Taller de la Universidad Nacional.

Metodología: La clase tendrá dos momentos, en el primero los estudiantes se reunirán por parejas y desarrollarán la guía de trabajo con la orientación y asesoría constante del docente, y en el segundo se hará una socialización de los resultados obtenidos, donde el docente concentrará la atención de los estudiantes en los conceptos más relevantes de la actividad. Los estudiantes realizaran actividades dos, tres y cuatro extra-clase donde aplicaran las construcciones vistas en clase.

Se realizarán construcciones con regla y compás, las cuales deben ir acompañadas de una descripción que le permita al estudiante ir acercándose a las definiciones de recta, segmento, ángulo, semirrecta, bisectriz, paralelismo, clasificación de triángulos, líneas notables del triángulo.

Para las siguientes construcciones sólo se necesitan de dos elementos, la regla (sin medición) euclidiana para trazar líneas rectas y el compás que permite trazar curvas de la circunferencia. La descripción paso a paso de cada construcción permite ir avanzando en la demostración.

Actividad uno: Definiciones

Dadas las siguientes construcciones, se realizara unas discuciones sobre las definiciones de: segmento, recta, semirecta, ángulo, triángulo, congruencia.

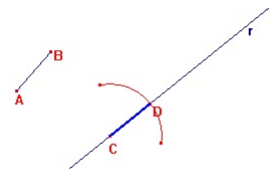


Figura 6: Segmentos congruentes

1. **Construir un segmento congruente a otro dado.**(figura 6) Dado el segmento $\overline{AB}$

   Centrando en C punto dado de la recta r y abertura $\overline{AB}$, trazo un arco que la corta en el punto D siendo $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ (figura 6)

2. **Construir un ángulo congruente a un ángulo dado.** Dado el ángulo $\widehat{B}$ (figura 7)

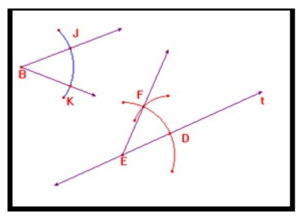
   

   Figura 7: Construcción de un ángulo congruente a otro dado

   Paso 1. Con centro en el punto B, del ángulo dado y radio arbitrario se traza un arco de circunferencia que cortará los lados del ángulo B en los puntos J y k.

   Paso 2. Sobre un punto E de una recta t y con radio $\overline{BK}$, se traza un arco de circunferencia que cortará la recta t en el punto D.

   Paso 3. Con centro en D y radio KJ, trazo un arco que cortará el arco trazado en el paso 2 en el punto F.

   Paso 4. Trazo la semirecta que pasa por EF

   Paso 5. Siendo $\widehat{FED}$ el ángulo pedido.

   Justificación $Bk \cong BJ$. Por ser radios del mismo arco.

   $BK \cong ED$ por ser segmentos trasladados.

   $DF \cong KJ$ Por ser segmentos trasladados.

   De esta manera hemos trasladado el triángulo $\triangle BJK \cong \triangle FED$, luego los ángulos $\widehat{JBK} \cong \widehat{FED}$ son congruentes por ser elementos correspondientes de triángulos congruentes.

3. **Trazar la mediatriz de un segmento dado.**

   Sea $\overline{AB}$ el segmento dado (figura 8)

   Paso 1. Con centro en A Y B y radio mayor que la mitad del segmento $\overline{AB}$ se trazan arcos de circunferencia que se cortarán en los puntos C y D, teniendo así las siguientes

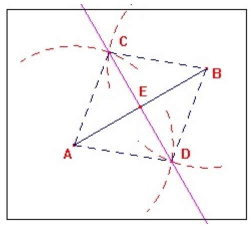


Figura 8: Mediatriz de un segmento dado

congruencias de los lados $\overline{AC} \cong \overline{BC} \cong \overline{AD} \cong \overline{BD}$ por ser todos ellos radios de los arcos congruentes. Luego $ACBD$ es un rombo (paralelogramo con sus lados congruentes)

Paso 2. Se traza la recta CD, El segmento $\overline{CD}$ es diagonal del rombo $ACBD$.

Paso 3. CD es la mediatriz del segmento $\overline{AB}$; recta perpendicular en el punto medio del segmento $\overline{AB}$

Mediatriz: Recta perpendicular a un segmento en su punto medio, propiedad: todos los puntos de la mediatriz son equidistantes de los extremos del segmento.
La mediatriz de un segmento es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de sus extremos.

Nota: Las diagonales de un rombo se cortan perpendicularmente y se bisecan. Para encontrar el punto medio de un segmento se realiza el mismo procedimiento anterior, sólo que no se traza la recta CD, únicamente se traza el punto E, intersección de la recta CD, con el segmento AB.

4. **Construir la bisectriz de un ángulo dado.** Ángulo $\widehat{B}$ dado (figura 9).

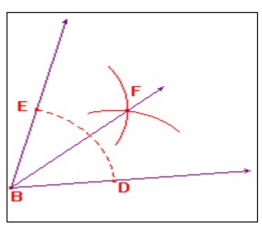


Figura 9: Bisectriz de un ángulo

Paso 1. Con centro en B y radio arbitrario se traza un arco de circunferencia que corta los lados del ángulo en los puntos D y E respectivamente, siendo así $\overline{BE} \cong \overline{BD}$ radios de la misma circunferencia.

Paso 2. Realizar el mismo procedimiento para trazar la mediatriz al segmento $\overline{DE}$, obteniendo el punto F.
$\overline{DF} \cong \overline{EF}$ por ser los mismos radios de arcos de la circunferencia de centro en D y E

Paso 3. Se traza la semirecta $\overrightarrow{BF}$, siendo DF la bisectriz del ángulo $\angle B$.

Los triángulos $\triangle BDF \cong \triangle BEF$, pues los tres lados son congruentes de las construcciones del paso 1, 2, 3. Por lo tanto, los ángulos $\widehat{DBF} \cong \widehat{EBF}$ por ser elementos correspondientes de los triángulos congruentes. Luego BF es la bisectriz del ángulo dado B.

5. **Recta perpendicular a una recta que pasa por un punto exterior a ella** (figura 10).

   Por un punto P exterior a una recta t, trace una recta s perpendicular a t.

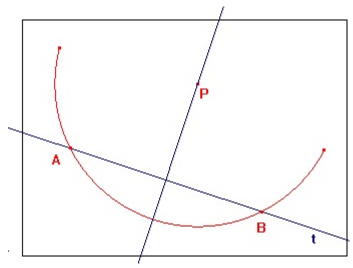


Figura 10: Perpendicular a una recta desde un punto exterior

Con centro en el punto p y radio tal que corte la recta t en dos puntos A y B, se traza la mediatriz al segmento $\overline{AB}$, que será la recta perpendicular e t y que pasa por el punto P.

6. **Por un punto *P* exterior a una recta *r*, trace una recta *k* paralela a *r*.** (figura 11).

Paso 1. Sobre la recta r marcamos los puntos A y B (punto sobre una recta), tazamos la recta AP

Paso 2. Construya en P un ángulo congruente al $\angle PAB$ que sea correspondiente a éste. Llámelo $\angle CPD$

Paso 3. Prolongue la semirecta $\overrightarrow{PD}$ siendo k la recta pedida.

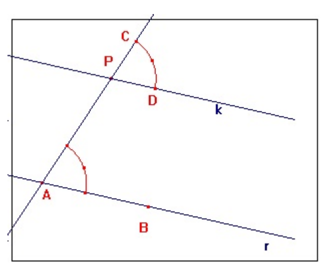


Figura 11: Rectas paralelas

En la construcción anterior fue posible construir por un punto P Exterior a una recta r, una recta paralela a ella. Afirmar que es la única, es posible porque forma parte del conjunto de afirmaciones escogidas para conformar la teoría de la Geometría de Euclides.

Actividad dos: Aplicación a triángulos

Para las siguientes construcciones, debe sustentarse en las anteriores.

7. Dado el trángulo $\triangle ABC$, trazar las mediatrices (figura 12).

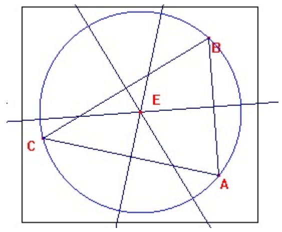


Figura 12: Mediatriz

Trazar las mediatrices de cada lado del triángulo empleando el procedimento ya indicado. Hallar la circunferencia circunscrita al triángulo dado. El punto de corte de las mediatrices se llama circuncentro.

8. Dado el trángulo $\triangle RQP$, trazar las medianas (figura 13).

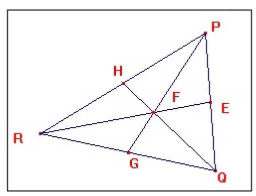


Figura 13: Mediana

Para la construcción de la mediana se encuentra el punto medio de cada lado y se traza un segmento desde el punto medio del lado al vértice opuesto.

Propiedades de la mediana: El punto de corte de las medianas es llamado, **Baricentro**, centro de gravedad.

Las medianas de un triángulo, se cortan en el baricentro situado a los $\frac{2}{3}$ de cada vértice y a $\frac{1}{3}$ del punto medio del lado.

Si se unen por medio de segmentos los puntos medios de cada par de lados se obtiene segmentos paralelos a los lados e igual a su mitad, Teorema de la paralela media; $\overline{HE} \parallel \overline{RQ}$ e igual a su mitad, $\overline{HE} = \frac{1}{2}\overline{RQ}$

9. Trazar las alturas de un triángulo (figura 14).

   Para trazar las alturas del triángulo. Se debe utilizar la construcción perpendicular a una recta desde un punto exterior a ella.

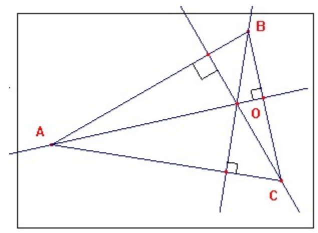


Figura 14: Altura del triángulo

El punto de corte de las alturas se llama **ortocentro**. Comprobar que en cualquier triángulo rectángulo dos de sus alturas corresponden a sus catetos, el ortocentro es el vértice del ángulo recto.

En todo triángulo obtusángulo, dos de sus alturas tienen sus pies en la prolongación de sus lados.

10. Trazar las bisectrices de un triángulo (figura 15).

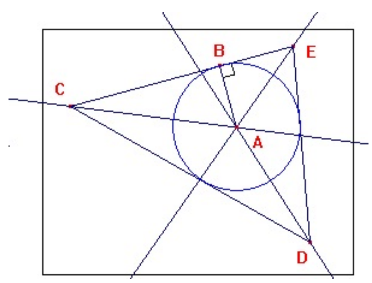


Figura 15: Bisectriz del triángulo

Para trazar las bisectrices de un triángulo, realizamos el mismo procedimiento bisectriz de un ángulo dado.

El punto de corte de las bisectrices se llama incentro, dado un triángulo $\triangle CDE$ hallar el incenctro, luego trazar una perpendicular desde el punto A a un lado cualquiera del triángulo, el segmento $\overline{AB}$ es el radio de la circunferencia trazada con centro en A.

Actividad tres : Realizar el siguiente taller

Realizar las siguientes construcciones

- Dado el segmento $\overline{AB}$, Construir un triángulo equilátero
- Construya ángulos cuyas respectivas medidas sean: 30°, 120°, 150°,60°, 75°
- Construir los diferentes triángulos según sus lados y ángulos: Ióseces rectángulo, isósceles acutangulo, isósceles obtusangulo, escaleno rectángulo, escaleno acutangulo, escaleno obtusangulo, esquilatero.

- A diferentes triángulos construirles las líneas notables: Mediana, altura, bisectriz, mediatriz.
- Verificar por medio de construcciones los siguientes enunciados.
  - ¿En qué triángulos el pie de la altura está en el punto medio de la base?
  - ¿En qué triángulos el pie de la altura está en el extremo de la base?
  - ¿En qué triángulos el pie de la altura está en la prolongación de la base?
  - En un triángulo isósceles las medianas correspondientes a los ángulos congruentes son congruentes.

Actividad cuatro: Paralelismo y Cuadriláteros

1. Demostrar que si se unen consecutivamente los puntos medios de un cuadrilátero cualquiera, resulta un paralelogramo cuyos lados son respectivamente iguales a la mitad de las diagonales (figura 16).

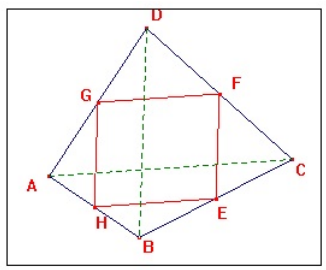


Figura 16: Cuadrilátero

Uniendo los puntos medios del cuadrilátero $ABCD$, obtenemos el paralelogramo $HEFG$, al ser $\overline{BD}$ diagonal del cuadrilátero dado,obtenemos los triángulos $\triangle BDC$ y $\triangle BDA$, como E y F son puntos medios luego por paralela media tenemos $\overline{EF} \parallel \overline{DB}$ y $\overline{HG} \parallel \overline{DB}$, luego $\overline{EF} \parallel \overline{GH}$, como también $\overline{EF} = \frac{1}{2}\overline{DB}$ y $\overline{EF}\frac{1}{2}\overline{DB}$, por tanto $\overline{EF} \cong \overline{GH}$ luego al ser paralela y congruentes, es un paralelogramo.

2. Dada la figura 17 con:
$\overline{AB} \cong \overline{AC}$
$m(\widehat{ABC}) = 65°$
$B - A - E$
$\overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{BC}$
Hallar: $m(\widehat{EAD})$ y $m(\widehat{DAC})$
El ángulo $\widehat{C} = 65°$ por ser $\widehat{C} \cong \widehat{B}$ ya que por hipótesis $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, como $\overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{BC}$ y $B - A - E$
Entonces $\widehat{EAD} = 65°$ por ser ángulos correspondientes entre paralelas.
y $\widehat{DAC} = 65°$ por ser ángulos alternos internos entre paralelas.

3. Construir un paralelogramo dados dos lados y el ángulo comprendido entre ellos.

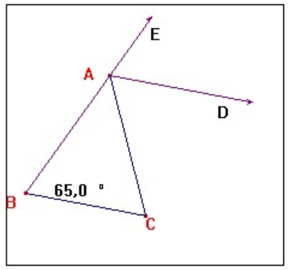


Figura 17: Ejemplo1

4. Construir un paralelogramo dados un lado y las dos diagonales.
5. Construir un paralelogramo dadas las diagonales y el ángulo que forman.
6. Construir un rectángulo dados un lado y al diagonal.
7. Construir un rectángulo dada la diagonal y el ángulo que forma con uno de los lados.
8. Construir un rombo dados el lado y un ángulo.
9. Construir un rombo dadas las diagonales.
10. Construir un cuadrado dada la diagonal.
11. Construir un trapecio dados los cuatro lados.
12. Construir un trapecio isósceles dadas las bases y un ángulo.

3.3. Clase número cuatro: Semejanza

Los siguientes conceptos serán los del texto, Notas de Geomtería Plana Cecilia Villagas, unidad 4.

- Teorema de Thales.
- Teorema de la bisectriz
- Criterio de semejanza de los triángulos; $A - A - A$, $A - L - A$, $L - L - L$

Materiales: Cuaderno, Lápiz, Regla y compás.

Ambientes de aprendizaje: Aula de clase.

Metodología: En un primer momento el estudiante desarrollará un taller, en el cual aplicará los conocimientos adquiridos; luego en parejas, confrontan el trabajo con la teoria de Guy Brousseau y en última instancia, socializarán los aspectos formales.

Construcción de media geométrica

Realice las siguientes instrucciones que le permitirán construir un segmento cuya longitud es la media geométrica entre las longitudes de dos segmentos dados.

Paso 1. Sean $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ dos segmentos dados. Dibuje una recta y sobre ella construya los segmentos $\overline{PQ}$ y QR de tal forma que $\overline{PQ} = \overline{AB}$ y $\overline{QR} = \overline{CD}$

Paso 2. Construya el punto medio M de $\overline{PR}$

Paso 3. Con centro M y radio $\overline{PM}$, construya la semicircunferencia para la cual $\overline{PR}$ es un diámetro.

Paso 4 A partir de Q construya un segmento perpendicular a $\overline{PR}$ y llame S al punto de intersección del segmento con la semicircunferencia QS que es la media geométrica entre AB y CD.

Realizar las siguientes construcciones con regla y compás.

1. Dividir una recta AB en partes congruentes.
2. Dividir una recta AB en partes proporcionales a dos segmentos dados a y b.
3. Hallar la cuarta proporcional a tres segmentos dados.
4. Hallar la tercera proporcional a dos segmentos dados.
5. Hallar la media proporcional entre dos segmentos dados.

3.4. Clase número cinco: Áreas y perímetro.

Los siguientes conceptos serán los del texto, Notas de Geomtería Plana Cecilia Villagas, unidad 6.

- Teorema de Pitágoras
- Áreas de polígonos, circulos y sectores.
- Perímetro de polígonos.

Materiales: Lápiz, Regla, compás, block sin rayas.

Ambientes de aprendizaje: Aula de clase.

Metodología: Realización de talleres acompañados de manera constante de la asesoría del docente.

Actividad uno: Polígonos, área y perímetro

En esta actividad se clasifican los polígonos por el número de lados, la suma de los ángulos interiores, el área del triángulo, cuadriláteros y los polígonos regulares en función de sus lados y la apotema.

Construir los diferentes polígonos y encontrar la suma de los ángulos interiores y de los ángulos exteriores.

Actividad dos: Área del cuadrado y su relación con otros polígonos

Mediante el concepto de área del cuadrado y su relación con los otros polígonos se realizan los siguientes ejercicios.

1. $\triangle ABC$ equilátero de lado a, figura 18. Desde cada vértice como centro se trazan arcos de circunferencia de radio a. Hallar el área comprendida entre el triángulo y los arcos.

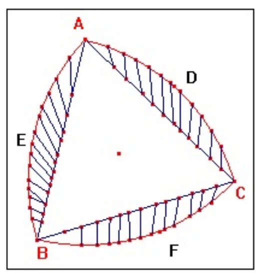


Figura 18: Área sombreada

Solución

Los segmentos circulares ADC, AEB, BFC, son congruentes, por tener $\triangle ABC$ Equilátero es decir sus segmentos $\overline{AB}$,$\overline{BC}$,$\overline{AC}$ son congruentes y los radios de cada arco son congruentes por ser iguales a a.
O sea el área de cada segmento circular es $3(ADC)$ veamos:

$$3[B(ADC) - \triangle BAC]$$
$$3[\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{2}a^2\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$3[\frac{1}{2}a^2\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}a^2\frac{\sqrt{3}}{2}]$$
$$\text{Luego el área es } \frac{a^2}{4}(2\pi - 3\sqrt{3})$$

2. $ABCD$ cuadrado de lado a, figura 19. Hallar el área sombreada.

Solución:
El área de la sección DEC es igual al área del cuadrado $ABCD$ menos el área del triángulo

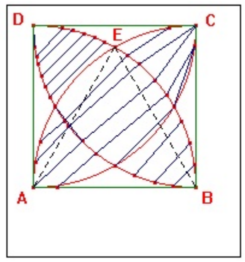


Figura 19: Área sombreada

$\triangle AEB$, que es equilátero ya que $\overline{EB}$ es el radio del arco con centro en B de igual manera el lado $\overline{AE}$ menos dos veces el área del sector circular ADE, por ser igual al sector circular BEC.
Luego tenemos el área del cuadrado $ABCD = a^2$
Área del triángulo $\triangle AEB = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$
Área del sector circular $ADE = \frac{\pi a^2}{12}$
Por tanto sustituyendo tenemos, área $DEC = \frac{a^2}{12}(12 - 3\sqrt{3} - 2\pi)$
Área sombreada:
área del cuadrado $ABCD - 4DEC$
$= a^2 - \frac{a^2}{12}(12 - 3\sqrt{3} - 2\pi)$
$= \frac{a^2}{3}(2\pi + 3\sqrt{3} - 9)$

3. Desde cada vértice de un cuadrado de lado a se trazan arcos de circunferencia de radio igual a la mitad de la diagonal; luego se unen dos a dos los extremos de estos arcos y se obtiene la Cruz de Malta. Hallar el área de la cruz, figura 20.

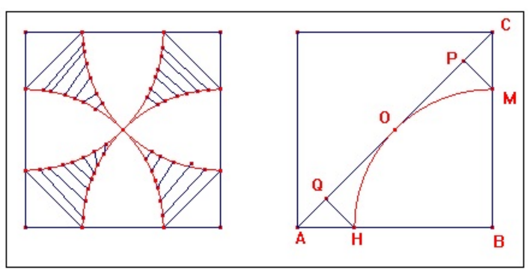


Figura 20: Área Cruz de Malta

Solución
Área(cruz)= 8 área (OMP)
$= 8$ $(rea(\triangle BOC)$- $reaB(OM)$- $rea(\triangle MPC))$ $AC = a\sqrt{2}$, por Teorema de Pitágoras en

el triángulo $\triangle ABC$.
El radio $= r = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$
$CM = CB - BM = a - \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a}{2}(2-\sqrt{2})$
El triángulo $\triangle CPM$ es isósceles por $\overline{AC}$ ser diagonal es bisectriz, por ser cuadrado, luego $\angle MCP = 45°$
$PC = PM = x$
En el triángulo $\triangle CPM$, por Pitágoras $CM^2 = PC^2 + PM^2$
Sustituyendo tenemos, $\frac{a^2}{4}(2-\sqrt{2})^2 = 2x^2$
$x^2 = \frac{a^2}{4}(3-2\sqrt{2})$
Área (cruz)$= 8(\frac{1}{2}\frac{a\sqrt{2}}{2}\frac{a\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\frac{a^2}{2}\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\frac{a^2}{4}(3-2\sqrt{2}))$
Área $= \frac{a^2}{2}(4\sqrt{2} - \pi - 2)$

Taller

1. En un triángulo, inscribir el rectángulo de área máxima.
2. De todos los triángulos que tienen la misma base y el mismo perímetro, ¿en cuál de ellos el área es máxima?
3. De todos los triángulos que tienen la misma área, ¿cuál es el que tiene mayor perímetro?
4. De todos los triángulos de igual perímetro, ¿Cuál es el de mayor área?
5. Se trazan dos segmentos congruentes entre sí y paralelas a una de las diagonales de un rectángulo, se forma un paralelogramo inscrito,¿Cuál es el paralelogramo máximo?
6. De todos los rectángulos en los cuales el perímetro es constante, ¿Cuál es el área máxima o bien, Cuál es el producto máximo de dos factores en los cuales la suma es constante?
7. En la figura 21, $ABCD$ es un cuadrado.
E, F, G puntos medios de $\overline{AD}, \overline{AC}$ y $\overline{BC}$ respectivamente.
AF y FC arcos de centro en E y G respectivamente.
Si el lado del cuadrado es a, determinar, en función de a, el área de la región sombreada.

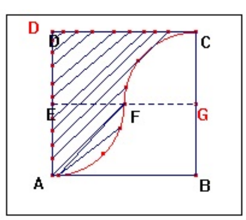


Figura 21: Área sombreada

3.5. Clase número seis: Volumen y área superficial de algunos sólidos

- Poliedros: Volumen, área superficial.
- Poliedros regulares: volumen, área superficial.
- Prismas: Volumen, área superficial.
- Pirámides: Volumen, área superficial.
- Cilindro, cono, esfera, volumen, área superficial.

Materiales: Lápiz, regla, compás, block sin rayas.

Ambientes de aprendizaje: Aula de clase.

Metodología: Realización de talleres acompañados de manera constante de la asesoría del docente.

Para los siguientes ejercicios se utiliza el taller propuesto por la Escuela de Matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia sede Medellín.

En los siguientes ejercicios aplicar las fórmulas para encontrar el volumen y área superficial.

1. Considere un envase, con tapas, en forma de un cilindro recto con radio R y altura h cuyo volumen es V.
   - Exprese el área superficial, A del envase, en términos de R y V.

     El cilindro está formado por tres figuras planas, un rectángulo de longitudes L y h, y dos círculos de radio R y longitud de la circunferencia L.
     El volumen del cilindro recto es $V = h\pi R^2$.
     Área superficial $A = 2.$ área círculo + área del rectángulo.
     $A = 2x\pi R^2 + 2\pi Rh$
     De la ecuación de volumen se sustituye.
     $A = 2\pi R(R + h)$
     $A = 2\pi R(R + \frac{v}{\pi R^2})$
   - Exprese el área superficial, A, del envase, en términos de h y V.
     Despejando R en la fórmula de volumen.
     $A = 2\pi R^2 + 2\pi Rh$
     $A = 2\frac{V}{h} + 2\pi h\sqrt{\frac{V}{h}}$
2. Calcule el volumen de un tronco de cono de $7,6$ cm de altura, sabiendo que los radios de sus bases miden, $4,9$cm y $2,1$cm
3. Un recipiente cilíndrico de 5cm de radio y 30 cm de altura contiene tres pelotas de tenis bien encajadas. Calcular el volumen de aire que hay en su interior.

4. La base de una pirámide regular es un hexágono de 15cm de lado. Su altura es de 30cm. Halle su volumen. Si partimos esta pirámide por un plano paralelo a la base que corta a la altura en la mitad, halle el volumen de cada una de las dos partes resultantes.

4. Conclusiones y Recomendaciones

En el curso de Matemáticas Básicas de la Universidad Nacional sede Medellín, se pudo evidenciar que en Geometría los estudiantes presentan falencias conceptuales. Por ejemplo, en temas básicos como lo es la clasificación de triángulos, se observa que algunos reconocían al triángulo rectángulo por ser el utilizado en trigonometría. De los cuadriláteros conocían su conjunto pero poco de las propiedades que tenía cada subconjunto. Es precisamente por estas falencias que recomiendo ampliar la intensidad horaria de 3 horas existentes a una intensidad de 6 horas de clase. Para cumplir dicho propósito propongo disminuir una hora en las temáticas de: Álgebra, Trigonometría y funciones reales, ya que éstos son temas que se trabajan con mayor intensidad en la Educación Básica secundaria. De lo anterior, se ve la necesidad de una intensidad de 6 horas en Geometría para poder dar cumplimiento a la propuesta.

Las teorías abordadas en el marco teórico aportaron efectivamente a la propuesta metodológica para abordar de manera apropiada la temática de Geometría. Éstas se complementaron de modo tal que respondieron a cada una de las necesidades que iban surgiendo durante el proceso de la propuesta. El componente didáctico fue soportado en la teoría de las Situaciones Didácticas de Guy Brousseau, la cual permitió identificar el tipo de situaciones que favorecen el aprendizaje de los estudiantes. Esta teoría asociada a la forma de desarrollar la intervención a través de talleres, utilizando el aprendizaje colaborativo, la exposición y el aprendizaje basado en problemas como técnicas didácticas, permitirán a los estudiantes apropiarse significativamente de los conceptos. Poder identificar en cada actividad el Nivel según las Teorías de los Van Hiele, permite realizar actividades que propicien el avance de un Nivel a otro mediante el uso de la regla y el compás con las construcciones.

Recomendaciones puntuales para el curso de Matemáticas Básicas:

- Cuando el grupo esté conformado por estudiantes en su mayoría pertenecientes a la misma carrera, se deben implementar actividades relacionadas a temas de su formación profesional, por ejemplo, si el grupo es de Matemáticas se debe realizar un curso más formal, si los estudiantes son de Economía, Agronomía, entre otros, los ejercicios deben contemplar temas de cada carrera. De esta manera pueden mostrar mayor interés por los temas.

- Al inicio del curso es importante realizar una prueba a manera de diagnóstico para revisar las necesidades de los estudiantes en las diferentes temáticas y hacer mayor énfasis en esas debilidades.

- El Aula Taller de Matemáticas de la Universidad es el mejor espacio para llevar a cabo la propuesta en la temática de Geometría, pues cuenta con un material adecuado para su enseñanza.

- Durante el curso se debe hacer un seguimiento más detallado de los diferentes temas que se desarrollan para mejorar el rendimiento de los estudiantes. Además, puede crear mayores hábitos de estudio, pues esto fue evidenciado en la práctica docente realizada.

5. Bibliografía

- GREGORIA, Guillén soler, Poliedros, Editorial Síntesis, Madrid, 1997.
- CASTELNUOVO, Emma. Geometría Intuitiva. México, Labor, 1963.
- CLAUDI, Alsina y otros. ¿Por qué Geometría? Síntesis, 1997.
- CHAMORRO, Carmen. Didáctica de las Matemáticas Básicas. Madrid: Pearson educación. 2003
- LANDAVERDE, Felipe de Jesús. Curso de geometría. Andes.
- GUY, Brousseau . Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas.libros del Zorzal 2007
- SAMPER, Carmen y otros, Cómo promover el razonamiento en el aula por medio de la geometría., Universidad Pedagógica Nacional. 2003
- CLEMENS, Stanley, Geometría, Editorial,Pearson Educación.1998
- CAMPO, Sanchez,Alberto, La educación geométrica,Universidad Nacional de Colombia.1981
- VASCO Uribe, Carlos Eduardo, Didáctica de las Matemáticas, Universidad Pedagógica Nacional.2006
- Dickson, Linda, Brown Margaren, Olwen Gibson, El aprendizaje de las matemáticas, Editorial Labor, 1991.
- GONZÄLEZ, Adriana, Weinstein, Edith, La enseñanza de la matemática en el jardín de infantes a través de secuencias didácticas, Editorial Limusa.2008
- VILLEGAS, de Arias, Celia, Valencia Restrepo, Notas de Geometría plana, Universidad Nacional de Colombia, junio 1991.

Anexo 1: Quiz de Geometría

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA- SEDE MEDELLÍN
MATEMÁTICAS BÁSICAS - Semestre 01/2011
QUIZ N° 4

NOMBRE:

1. (20 puntos)Con un alambre de 100 cm se construyen un cuadrado y una circunferencia, usando todo el alambre disponible.
   - Si L denota la longitud del lado del cuadrado, calcule la **la suma** de las áreas de las dos figuras, en términos de L.
   - Si r denota el radio de la circunferencia, calcule la **suma**de las áreas de las dos figuras, en terminos de r.

2. (20 puntos) Se pide recortar en cada uno de los vértices de un cuadrado de lado "a", un triángulo isósceles del mismo tamaño, de modo que el perímetro del octógono resultante sea los tres cuartos del perímetro del cuadrado. ¿Cuál será la magnitud de los lados iguales del triángulo isósceles?

3. (10 puntos) Calcular el valor del ángulo formado por las bisectrices de dos ángulos consecutivos A y B de un paralelogramo.

Anexo 2: Las clases de Geometría

MATEMÁTICAS BÁSICAS
UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA - SEDE MEDELLIN
Semestre 01/2011
Clase 12 y 13

ELABORADO POR: MARTHA JULIET VALENCIA VILLA
CC: 42887820
Estudiandte de Maestria en Enseñanza de las Ciencias

PREGUNTAS INICIALES

- ¿ Con tres segmentos cualquiera se puede formar un triángulo?
- ¿Qué es un paralelogramo ?
- ¿cómo se traza la altura a un triángulo?
- Cómo Trazar la circunferencia incrita a un triángulo obtusángulo escaleno?.

1. **Definiciones básicas de geometría**

   a) Construcción de la perpéndicular a una recta desde un punto exterior ella, concepto de perpendicular, angulos adyacentes, ángulos suplementarios, ángulos opuestos por el vértice.

   b) Clases de ángulos: Ángulo agudo: es el que mide menos de 90.

      1) Ángulo agudo:es el que mide menos de 90.
      2) Ángulo recto: es el que mide exactamente 90.
      3) Ángulo obtuso: es el que mide más de 90 y menos de 180.
      4) Ángulo llano: es el que mide 180.

   c) Construcción de los diferentes triángulos con sus lineas notables: Mediatriz, bisectriz, mediana, altura, circunferencia inscrita y circunscrita, puntos de intersección de ellas, circuncentro, incentro, baricentro, ortocentro, propiedades como la paralela media en el trángulo, la mediana que parte del ángulo recto del triángulo rectángulo, ángulo exterior de un triángulo igual la la suma de los ángulos no adyacentes.

   d) Rectas paralelas, ángulos alternos internos, alternos externos y correspondientes.

   e) Teoremas de congruencia de triángulos: ALA, LAL,LLL, de triángulos rectángulos si tienen los dos catetos congruentes, la desigualdad triángular.

   f) Cuadriláteros: trapecio, paralelogramo, rectángulo, cuadrado, rombo, las propiedades respecto de sus lados, ángulos, diagonales.

g) Circunferencia y circulo, definición sus ángulos, se relación con el número pi.

h) semejanza y proporcionalidad.

i) Triángulos semejantes Casos de semajanza

Ejemplos a Desarrollar en Clase No 12 y 13

2. Taller de la escuela de matemáticas Los ejercicios: 5,6,8,9. Los conceptos que se desarrollan en esos ejercicios son: Perpendicularidad, ángulos suplementarios, suma de los ángulos interiores de un triángulo, rectas paralelas y sus ángulos, ángulos adyacetes, ángulos suplementarios.

3. Taller de la escuela de matemáticas los ejercicios: 11, 12, 13.Los conceptos a desarrollar son: Congruencia de triángulos ALA, LLL, LAL, triángulos isosceles y las relaciones con sus ángulos y lados, congruencia en los triángulos rectángulos.

4. Taller de la escuela de matemáticas los ejercicios:16, 17, 18, 19. Los conceptos a desarrollar son Teorema de Thales, Paralela media en el triangulo, criterios de semejanza en los triángulos, Bisectriz de un ángulo de un triángulo divide el lado opuesto en partes proporcionales a los otros dos lados.

MATEMÁTICAS BÁSICAS
UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA - SEDE MEDELLIN
Semestre 01/2011
Clase 14

ÁREAS Y PERÍMETROS

1. Área y perimetro de algunos poligónos cuadrilateros y triángulos
2. circunferencia y círculo.
3. Teorema de Pitagoras.
4. Volumen de algunos solidos.

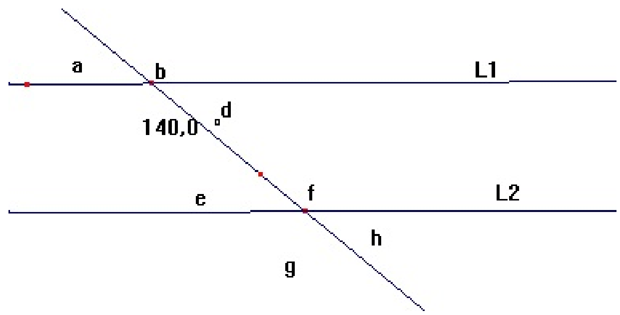
Ejemplos a Desarrollar en Clase No 14

1. El perímetro de un trapecio isóceles es de 12cm; Calcular la altura, sabiendo que la base mayor mide 5cm y es el doble de la base menor.
2. Taller de la escuela de matemáticas los ejercicios:1, 2, 3,4, 7,8, 12,13. conceptos a desarollar con los jercicios: área del sector circular, área del triángulo, teorema de 30, 60,90 teorema de pitagoras, pérímetro, longitud del arco de circunferncia, área de la círculo, del rectángulo.
3. Taller de la escuela de matemáticas los ejercicios: 7,8,9 12,13, 14. conceptos a desarollar con los jercicios: Volumen del tronco del cono, Volumen de un cilindro, volumen de la esfera, volumen de una piramide, apotema, perímetro del triángulo del cuadrado y sus áreas, área del círculo,volumen del cono. área superficial.
4. Calcular la altura de un triángulo equilátero cuyo lado mide 3.6cm.

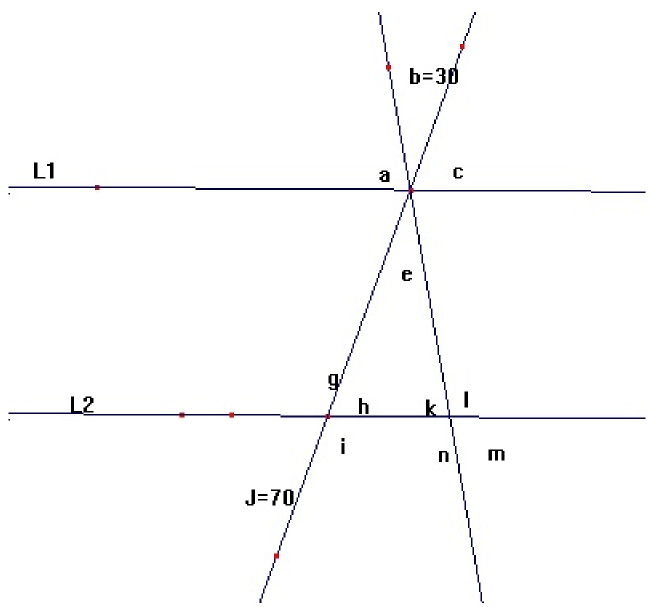
Anexo 3: Tallerer de Geometría

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA - SEDE MEDELLIN
Matemáticas Básicas - Semestre 01/2011
Taller 1

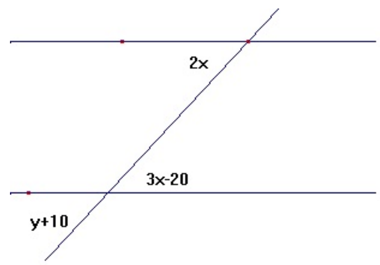
1. Si L_1 y L_2 son rectas paralelas y $C = 30°$ halle la medida de los ángulos restantes:



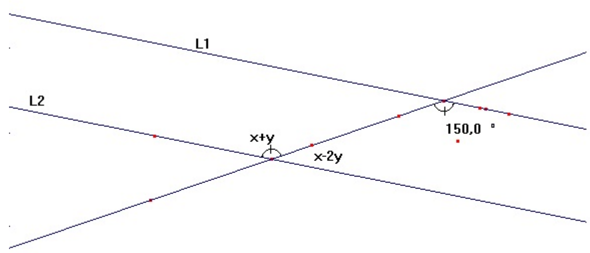
2. Si L_1 y L_2 son rectas paralelas y $b = 30°$ y $j = 700°$, encuentre la medida de los ángulos restantes.



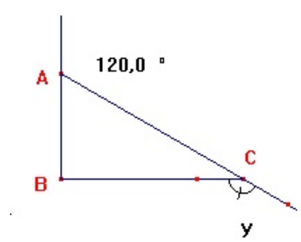
3. Si L_1 y L_2 son paralelas, encuentre los valores de x y de y



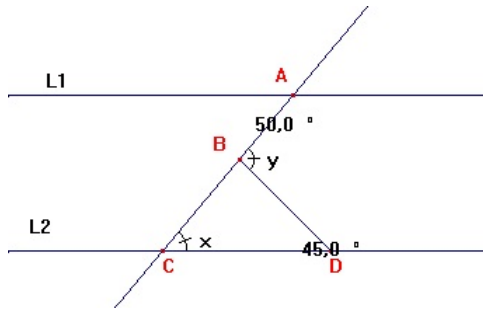
4. Si L_1 y L_2 son paralelas, encuentre los valores de x y de y



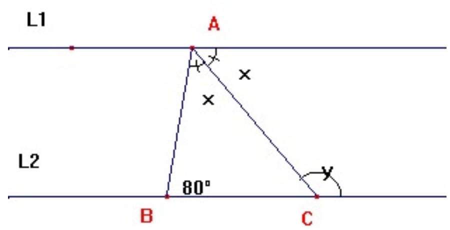
5. Si el segmento $\overline{AB}$ es perpendicular al segmento $\overline{BC}$, halle el valor de y:



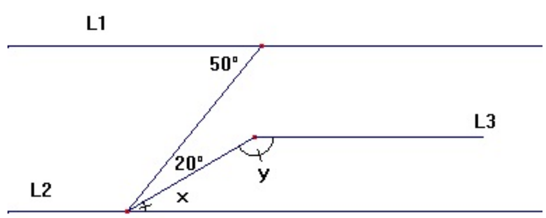
6. Si L_1 y L_2 son paralelas, encuentre los valores de x y y:



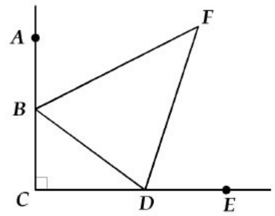
7. Si L_1 y L_2 son paralelas, encuentre los valores de x y y:



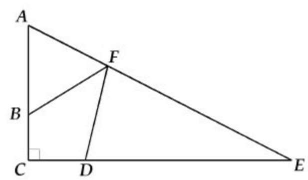
8. Si L_1 y L_2 son paralelas, encuentre los valores de x y y:



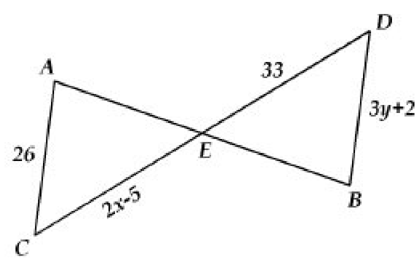
9. Dado que $\overline{AC}$ es perpendicular a $\overline{CE}$, que $\overline{BF}$ es bisectriz de $\measuredangle ABD$ y que $\overline{DF}$ es bisectriz de $\measuredangle BDE$, halle el valor de $\measuredangle BFD$



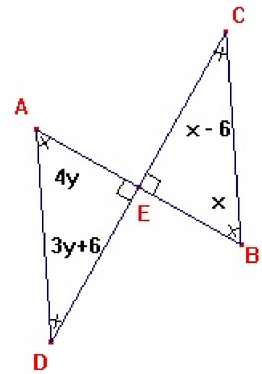
10. Dado que $\triangle\ ACE$ es rectángulo en C, que $\overline{AB} \cong \overline{AF}$ y que $\overline{FE} \cong \overline{DE}$, halle el valor de $\measuredangle BFD$.



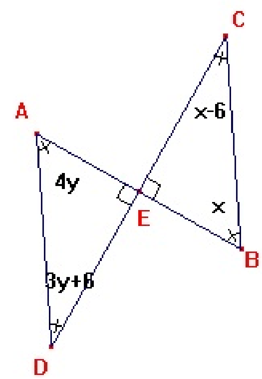
11. Sabiendo que $\overline{AE} \cong \overline{EB}$ y que $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ son paralelos, encuentre los valores de x y y.



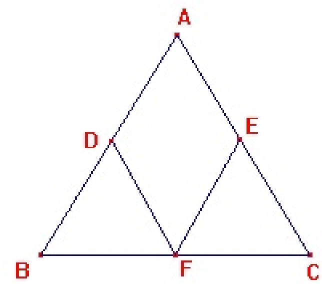
12. Sabiendo que $\overline{CD} \cong \overline{CE}$ y que $\angle ACD \cong \angle BCE$, encuentre los valores de x y y.



13. Sabiendo que $\triangle ADE$ y $\triangle BCE$ son rectángulos en E,que $\overline{AE} \cong \overline{EB}$ y que $\overline{CE} \cong \overline{DE}$, encuentre los valores de x y y.

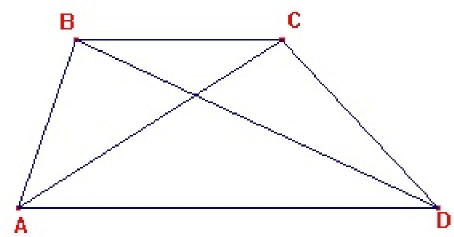


14. Considere la siguiente figura:

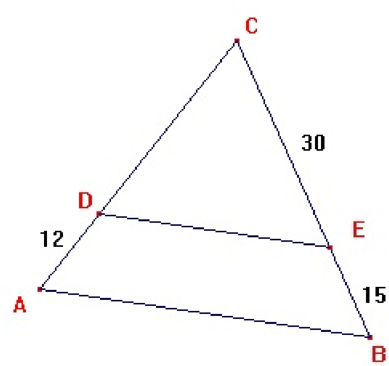


- Sabiendo que $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, que F es punto medio de $\overline{BC}$ y que $\angle BFD \cong \angle CFE$, demuestre que $\overline{FD} \cong \overline{FE}$.
- Sabiendo que $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, que $\overline{AD} \cong \overline{AE}$, y que $\overline{FD}$ y $\overline{AB}$,son perpendiculares y que $\overline{FE}$ y $\overline{AC}$ son perpendiculares, demuestre que $\overline{BF} \cong \overline{FC}$.

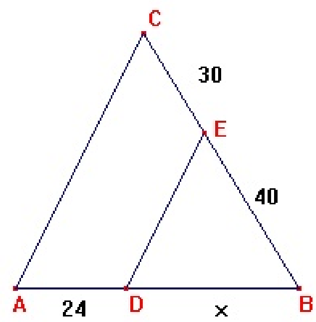
15. Sabiendo que $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$ son paralelos, demuestre que $\triangle ADE$ y $\triangle BCE$ son semejantes y escriba la proporción que se cumple.



16. Sabiendo que $\overline{DE}$ y $\overline{AB}$ son paralelos, determine la longitud del segmento $\overline{CD}$

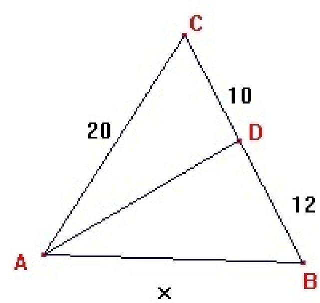


17. Sabiendo que $\overline{AC}$ y $\overline{DE}$ son paralelos, halle el valor de x.

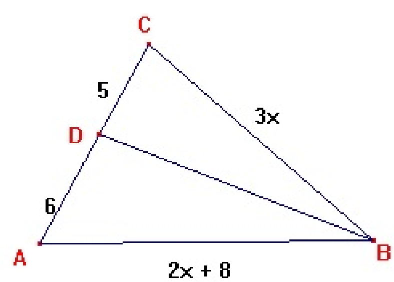


a) Demuestre que la bisectriz del ángulo interior de un ángulo, divide al lado opuesto en segmentos proporcionales a los otros dos lados.

b) sabiendo que $\overline{AD}$ es bisectriz de $\angle CAB$, calcule el valor de x.

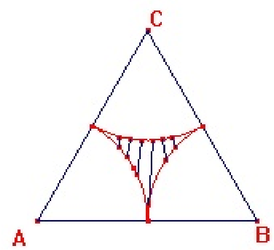


c) Sabiendo que $\overline{BD}$ es bisectriz de $\angle ABC$, calcule el valor de x.

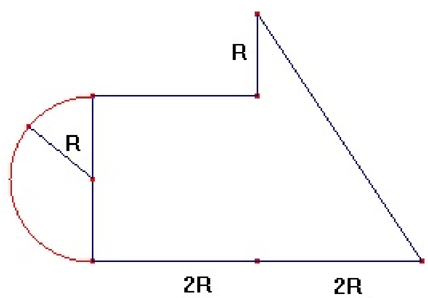


UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA - SEDE MEDELLIN
Matemáticas Básicas - Semestre 01/2011
Taller No 2

1. Sea $\triangle ABC$ equilátero con lado L. Si desde cada uno de los vértices se traza un arco de circunferencia con radio $\frac{L}{2}$, calcule el área sombreada en términos de L

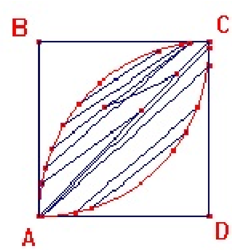


2. El perímetro de la figura que se muestra a continuación es $20m$.

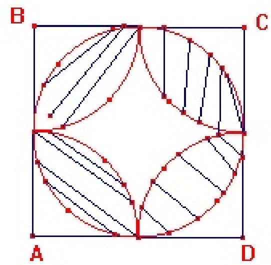


   a) Halle el valor de R.
   b) Calcule el área de la región.

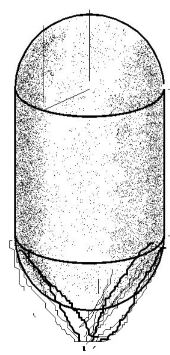
3. Sea $ABCD$ un caudrado de lado L. Si desde los vértices B y D se traza $\frac{1}{4}$ de arco de circunferencia con radio L tal como se muestra en la figura, calcule el área sombreada.



4. Sea $ABCD$ un cudrado de lado $2L$, si desde el centro del cuadrado trazamos una circunferencia completa con radio L y desde cada uno de los vértices trazamos $\frac{1}{4}$ de circunferencia con radio L, como lo muestra la figura, calcule el área sombreada.



5. El solido de la figura esta conformado por un cilindro circular recto de radio R y altura $2R$ que tiene en un extremo una semiesfera y en el otro un cono circular recto de altura R. Si el volumen total del solido es 3π, m^3, halle el área de su superficie. halle el area de su superficie.



6. Considere un envase, con tapas, en forma de un cilindro circular recto con radio R y altura h y cuyo volumenn es V.

   a) Exprese el área superficial, A, del envase, en términos de R y V.

   b) Exprese el área superficial, A, del envase, en términos de h y V.

7. Dos circunferencias de radio $1m$ y $75cm$, cuyos centros distan $2m$, se unen por una correa sin fin exteriormente, determina su longitud.

8. Se pide recortar en cada uno de los vértices de un cuadrado de lado “a”, un triángulo isósceles del mismo tamaño , de modo que el perímetro del octógono resultante sea los tres cuartos del perímetro del cuadrado. ¿Cuál será la magnitud de los lados iguales del triángulo isósceles?

9. Calcula el volumen de un tronco de cono de 7,6 cm de altura, sabiendo que los radios de sus bases miden 4,9 cm y 2,1 cm.

10. Un recipiente cilíndrico de 5 cm de radio y 30 cm de altura contiene tres pelotas de tenis bien encajadas. Calcula el volumen de aire que hay en su interior.

11. La base de una pirámide regular es un hexágono de 15 cm de lado. Su altura es de 30 cm. Halla su volumen. Si partimos esta pirámide por un plano paralelo a la base que corta a la altura en la mitad, halla el volumen de cada una de las dos partes resultantes.

12. Con un alambre de 100 cm se construyen un cuadrado y un triángulo equilátero, usando todo el alambre disponible.

    a) Si L denota la longitud del lado del cuadrado, calcule la suma de las áreas de las dos figuras, en términos de L.

    b) Si w denota la longitud de un lado del triángulo, calcule la suma de las áreas de las dos figuras, en términos de w.

13. Con un alambre de 100 cm se construyen un cuadrado y una circunferencia, usando todo el alambre disponible.

    a) Si L denota la longitud del lado del cuadrado, calcule la suma de las áreas de las dos figuras, en términos de L.

    b) Calcule la suma de las áreas de las dos figuras en términos de el radio de la circunferencia.